

التمرين الأول: (أسئلة حول الدروس)
(1) أدرس طبيعة التكاملات الموسعة التالية:

$$I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x dx, \quad I_1 = \int_0^1 (x - \ln x) dx$$

(2) بإستعمال التعريف (δ, ϵ) ، أثبت أن : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ حيث:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

(3) أدرس استمرارية التابع $g(x,y)$ حيث:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2y^2}{x^2 - y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(4) أحسب التكامل الثنائي التالي: $J_1 = \int \int_{\Omega} (3 + xy) dx dy$ حيث Ω هو المستوى المحدد بالمعادلات $y = 2 - \frac{2}{3}x$ و $y = 0$ ، $x = 0$

(5) أحسب التكامل الثلاثي التالي: $J_2 = \int \int \int_D (x^2 + yz^3) dx dy dz$ حيث:

$$D = \{(x,y,z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$$

(6) لتكن f دالة دوريه و دورتها $T = 2\pi$ حيث:

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = x^2 - \pi^2$$

(أ) هل f دالة فردية أم زوجية.

(ب) أنشر f على شكل سلسلة فورييه

(ج) أحسب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

التمرين الثاني : أ ليكن التابع h المعروف بـ:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : h(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin t}{t}$$

(1) أحسب $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$

(2) أثبت أن: $\int_1^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$ متقارب نظيميا من أجل $x \in \mathbb{R}_+$

ب) لتكن f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ ولتكن $z(x, y) = f(x)g(y)$

• أثبت أن $z(x, y)$ تحقق المعادلة: $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$

التمرين الثالث: 1 باستخدام تبديل المتغير المعروف بـ:

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y. \end{cases}$$

• أكتب x و y بدلالة u و v

• ب) أوجد المصفوفة اليعقوبية $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ و محددتها

• ج) أحسب التكامل J حيث:

$$J = \int \int_E (x-1)^2 dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1, -2 \leq x-y \leq 2\}$$

الحل النموذجي لإختبار السداسي الأول
في مقياس التحليل الرياضي

المكون الأول : أسئلة حول الدروس

[1] دراسة طبيعة التكاملات الموسعة :

$$I_2 = \int_0^1 (x - \ln x) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 - \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \ln t dt$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \left[t \ln t - t \right]_x^1$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \left[-1 - \underbrace{x \ln x}_0 + x \right]$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

بإستعمال الكتابة بالتجزئة

ومنه I_2 متقارب

$$\int_1^{+\infty} |e^x \ln x| dx \leq \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t e^t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-t e^t - e^t \right]_1^x$$

$$= \left[-x e^x - e^x + e^1 + e^1 \right]$$

$$= \frac{2}{e}$$

بإستعمال المقارنة

ومنه I_2 متقارب

$$I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{x \ln 3}} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x e^{-t \ln 3} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\ln 3} \int_2^x (-\ln 3) e^{-t \ln 3} dt \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\ln 3} \left(e^{-t \ln 3} \right)^2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\ln 3} \left(e^{-x \ln 3} - e^{-2 \ln 3} \right) \right]$$

$$= \frac{e^{-2 \ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9 \ln 3}$$

ومنه I_3 متقارب

[2] باستعمال التعريف ϵ و δ : إثبات أن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$$

$$|f(x,y) - 1| = \left| x \sin \frac{1}{y} + 1 - 1 \right| = \left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|$$

$$\leq \sup \{ |x|, |y| \}$$

$$\leq \|(x,y) - (0,0)\|_{\infty}$$

لدينا $|x| + |y|$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \epsilon \quad \text{تقريباً} : \|(x,y) - (0,0)\|_{\infty} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 1| < \epsilon$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$$

وهذا يعبر أن

(3) دراسة استمرارية التابع $g(x,y)$ عند $(0,0)$:

(P) حساب نهاية التابع $g(x,y)$ وسوف نستخدم النهايات التكرارية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2y^2}{x^2 - y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^4}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 = l_1 \quad (0,8)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2y^2}{x^2 - y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{2y^2}{-y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (-2) = -2 = l_2 \quad (0,8)$$

لما $l_1 \neq l_2$ فالتابع غير موجود عند $(0,0)$.

(4) استمرارية التابع: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ غير موجوده خارج التابع

f غير مستمر عند $(0,0)$ ومنه فهو غير مستمر على $\mathbb{R}^2$

(4) حساب التكامل الثنائي التالي :

$$I_1 = \iint_{\Omega} (3 + xy) dx dy = \int_0^2 \int_0^3 (3 + xy) dx dy = \int_0^2 \left[3x + \frac{y}{2} x^2 \right]_0^3 dy$$

$y=2 \Leftrightarrow x=0$
 $y=2 \Leftrightarrow x=3$
 $y=0 \Leftrightarrow x=0$
 $y=0 \Leftrightarrow x=3$

$$I_1 = \int_0^2 \left(9 + \frac{9}{2} y \right) dy = \left[9y + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_0^2$$

$$(0,8) = 18 + \frac{9}{4} \times 4 = 27.$$

(5) حساب التكامل الثلاثي التالي :

$$I_2 = \iiint_D (x^2 + yz^3) dx dy dz = \int_0^2 \int_0^4 \int_{-1}^1 (x^2 + yz^3) dx dy dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^4 \left(\frac{1}{3} x^3 + yz^3 x \right) \Big|_{-1}^1 dy dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^4 \left(\frac{1}{3} + yz^3 + \frac{1}{3} + yz^3 \right) dy dz$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{2}{3} y + \frac{2}{2} y^2 z^3 \right) \Big|_0^4 dz = \int_0^2 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + 16 z^3 - \frac{2}{3} \cdot 0 - 0 \right) dz$$

• 0 في مركز f : n=0 في $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ حساب (ج)

$$f(0) = -\frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n(0) \quad (0,8)$$

$$= -\frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$-\pi^2 + \frac{2}{3} \pi^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow -\frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi}{12} \quad (0,8)$$

$$h(n,t) = e^{-tn} \frac{\sin t}{t}$$

المركب الثاني : ج

حساب $\frac{\partial h}{\partial n}$ ج

$$\frac{\partial h}{\partial n}(n,t) = -t e^{-tn} \frac{\sin t}{t} = -e^{-tn} \sin t \quad (0,8)$$

(2) إثبات أن : $\int_1^{\infty} \frac{\partial h}{\partial n}(n,t) dt$ متقارب نظرياً .

لدينا

$$| -e^{-tn} \sin t | \leq | e^{-tn} | \leq e^{-t} = g(t) \quad (0,8) \quad (1)$$

(2) $g(t)$ قابلة للتكامل مطلقاً .

(3) $\int_1^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{e}$ متقارب ببساطة ومنه فإن : $\int_1^{\infty} e^{-tn} \sin t dt$ متقارب نظرياً على $\mathbb{R}_+$.

• $\int_1^{\infty} e^{-tn} \sin t dt$ متقارب نظرياً على $\mathbb{R}_+$.

[ب] لدينا : $z(m,y) = f(m)g(y)$: z تحقق المعادلة معاً : $\frac{\partial^2 z}{\partial m \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial m}$

$$\frac{\partial z}{\partial m} = f'(m)g(y) \quad (0,8) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(m)g'(y) \quad (0,8)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial m \partial y} = \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial m} [f(m)g'(y)] = f'(m)g'(y)$$

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial m \partial y} = f(m)g(y) \cdot f'(m)g'(y) = f'(m)g(y) \cdot f(m)g'(y) \quad (0,8)$$

• z تحقق المعادلة .

التمرين الثالث

كتابة x و y بدلالة u و v

دعنا

$$\begin{cases} u = x + y \quad \text{--- (1)} \\ v = x - y \quad \text{--- (2)} \end{cases}$$
 نجمع (1) و (2) نجد $u + v = 2x$

$$x = \frac{u + v}{2}$$

نطرح (2) من (1) نجد $u - v = 2y \Rightarrow y = \frac{u - v}{2}$

[٥] المصفوفة التحويلية $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(٦) حساب التكامل J

$$J = \iint_E (x-1)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{u+v}{2} - 1 \right)^2 du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{u+v-2}{2} \right)^2 du dv$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left[\int_{-1}^1 (u+v-2)^2 du \right] dv$$

$$= \frac{136}{3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \frac{2}{3} + 7z^3 dz = \left[\frac{2}{3}z + \frac{7}{4}z^4 \right]_0^2 \\
 &= \frac{2}{3} \times 2 + \frac{7}{4} \times 2^4 \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{7}{4} \times 16 = \frac{4}{3} + 28 \\
 &= \frac{4 + 28 \times 3}{3} \\
 &= \frac{88}{3} \quad (0,8)
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, f(x) = x^2 - \pi^2 \quad (6)$$

$$f(x) = x^2 - \pi^2$$

f دالة زوجية لأن

$$f(-x) = (-x)^2 - \pi^2$$

$$f(x) = f(-x) \quad \text{بأن} \quad (0,8)$$

f زوجية.

(ب) سنر f على شكل سلسلة فورييه.

بما أن f دالة زوجية فإن سلسلة فورييه المرافقة لها تعطى بالعلاقة

$$\begin{cases}
 (0,8) & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \\
 (0,8) & a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx. \\
 (0,8) & \forall n \geq 1, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.
 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \pi^3 \right] = -\frac{4}{3} \pi^2 \quad (0,8)$$

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq 1, a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos nx dx = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{n} \sin nx dx \\
 &= \frac{+4}{n^2 \pi} \left[x \cos nx \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad (0,8)
 \end{aligned}$$

وبما أن سلسلة فورييه المرافقة ل f تعطى بـ

$$f(x) = -\frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (0,8)$$